Über die

Belichtung von krummen Flächen

speziell von Rotationsflächen II. Ordnung.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

hohen philosophischen Fakultät der Universität Rostock

vorgelegt

von

Heinrich Schnitzler

aus Neuss a/Rh.

ACAD.
LUGD.BAT.
BIBL.

Rostock

Carl Hinstorffs Buchdruckerei.

1904.

Referent: Herr Prof. Dr. Matthiessen.

Meinen lieben Eltern

in Dankbarkeit gewidmet.

Inhalts-Verzeichnis.

Seite

Einleitung 7

Allgemeiner Teil.

§ 1. Grundlegendes 11

§ 2. Die Beleuchtung durch ein divergentes Strahlenbüschel 17

§ 3. Die Beleuchtung einer krummen Fläche durch beliebig viele Lichtpunkte 20

Spezieller Teil. Die Beleuchtung

§ 4. des Rotationsellipsoids von einem Brennpunkte aus 23

§ 5. des Rotationsellipsoids von beiden Brennpunkten aus 30

§ 6. des Rotationsparaboloids von dem Brennpunkte aus 34

§ 7. der beiden Rotationshyperboloide 36

Einleitung.

Die Anfänge der theoretischen Photometrie reichen in eine frühe Zeit zurück und sind niedergelegt in den nach der Art der Zeit breiten, im Kern aber gediegenen Abhandlungen von Lambert[1] und Bouguer.[2] Lambert greift noch zurück auf Erörterungen bei Newton, Euler und Smith und Kästner. Zu nennen ist hier auch eine Arbeit, die aus dem Kreise von Schülern des verdienstvollen Geometers Monge hervorging, von Dupuis redigiert ist, und die Isophengen einer Kugelfläche zeichnen lehrt.[3] Erst 70 Jahre später wurden diese Linien für andere Flächen untersucht von Burmester. Was bis dahin Karsten,[4] v. Langsdorff,[5] Herschel[6] und Brandes[7] boten, geht nicht über Lambert hinaus. Nur Beer,[8] der 1854

1) J. H. Lambert, Photometria sive de mensura et gradibus luminis, colorum et umbrae. Augsburg 1760. Dtsch. v. E. Anding, Lamberts Photmetrie, 3 Hfte. Leipz. 1891.

2) Bouguer, Essai d'optique sur la gradation de la lumière. Paris 1729; Ders., Traité d'optique, Oeuv. posth. publ. de M. l'Abbé de la Caille, Paris 1760.

3) Mémoire sur la détermination géometrique des teintes dans les dessins. Journ. de l'école polyt., cah. I. Paris, an III (1797.)

4) Karsten, Lehrbegriff der ges. Math. Greifsw. 1767—77. 8. Teil.

5) v. Langsdorff, Grundlehren der Photometrie, Erl. 1803—05.

6) J. Herschel, On light, deutsch von Schmidt, Stuttgart und Tübingen 1831.

7) Brandes, Gehlers physik. Wörterbuch, 2. Aufl. Leipz. 1881. Artikel Erleuchtung.

8) A. Beer, Grundriss des photom. Calcules, Braunschw. 1854.

Lamberts Photometrie von allem weitschweifigen Beiwerk entkleidet und in moderner Behandlung herausgab, fügte seinem Buche auch eine Anzahl neuer, bedeutsamer Probleme und Lösungen ein. Für die Grundlagen ist auch eine Arbeit Zöllners[1] von Bedeutung gewesen.

In den weiter hier zu erwähnenden Schriften ist durchweg die Belichtung der Körper durch parallele Strahlenbündel vorausgesetzt, wie sie ja auch den Verhältnissen in der Natur am ehesten entspricht. Es handelt sich meist um Aufsuchung der Linien gleicher Helligkeit auf den Flächen. In den älteren Werken über darstellende Geometrie u. ä.[2] wird die Beleuchtungsfrage nur eben ventiliert; die neueren[3] lassen ihr eine eingehendere Betrachtung zu Teil werden.

Von den anderen einschlägigen, z. T. bereits bei Wiener[4] erwähnten Arbeiten behandeln die Frage nach den Helligkeitslinien auf Flächen ausschliesslich oder grösstenteils konstruktiv die folgenden: Hönigs,[5] Egle,[6] Kammerer,[7] Tilscher[8]

1) Zöllner, Photometrische Untersuchungen. Leipzig 1865.

2) Leroy, Paris 1844; Olivier, Paris 1847 u. a.

3) Fiedler, Wiener, Rohn-Papperitz u. a.

4) Eine historische Entwickelung der Schatten- und Beleuchtungslehre gibt Wiener in seinem Lehrbuche d. darst. Geom. Leipz. 1884. I. Bd. p. 53. — S. a. Chr. Wiener, Die Zerstreuung des Lichts durch matte Oberflächen. Wied. Ann. 47, p. 638. 1892.

5) J. Hönigs, Darst. Geom. Wien 1845.

6) J. Egle, Über das Schattieren der Oberfl. regelmässiger Körper. Festschr. d. Polyt. Schule in Stuttgart. 1855.

7) F. Kammerer, Die Lichtintensitätskurven auf krummen Flächen. Sitz.-Ber. d. Wien. Ak. XLVI, 2. p. 405, 1862.

8) F. Tilscher, Die Lehre der geom. Beleuchtungs-Konstruktionen, Wien 1862.

(in umfassender Weise, aber nur die wahre Beleuchtung), Niemtschik,[1] Matzek,[2] Tessari,[3] Bazala,[4] Göller,[5] Mandl,[6] Schmidt[7] und Weinnoldt;[8] mehr analytisch aber die folgenden: Bordoni,[9] Breton,[10] Kounty,[11] Günther,[12] Höhl,[13] Pieri[14] und Müller.[15]

1) R. Niemtschik, Direkte Beleuchtungskonstruktionen für Flächen, deren zu einer Axe senkrechte Schnitte ähnliche Ellipsen sind. Wien. Ber. LVII, 2. 1868.

2) F. Matzek, Konstruktion der Kurven bestimmter Beleuchtungsintensität an Rotationsfl. mit Benutzung berührender Kugelfl. Wien. Ber. LVIII, 2. p. 49.

3) D. Tessari, La teoria delle ombre e del sciaro-scuro. Torino 1880.

4) J. Bazala, Neue Beleuchtungskonstr. für Flächen, deren zu einer Axe normale Schnitte ähnlich und ähnlich liegend sind, im allg. u. f. Flächen 2. Gr. im bes. Grun. Arch. (2) 11. p. 113.

5) Ad. Göller, Lehrb. d. Schattenkonstr. u. Beleuchtungskunde. Stuttg. 1895.

6) J. Mandl, Darst. d. scheinb. Bel. krummer Flächen. Wien, Ber. 105 IIa p. 807. 1896.

7) A. Schmidt, Die Auffindung der Lichtstufen bel. Flächen mittelst der Rodenberg'schen Skala. Unterrichtsbl. f. Math. u. Nat. VII. p. 85. 1901.

8) E. Weinnoldt, Über die Konstruktion von Jsophengen auf Flächen 2. Ordng. Grun. Arch. (3) 4. 1903, p. 22.

9) Bordoni, Pavia 1823.

10) Breton, Distribution de la lumière sur une surface éclairée par plusieurs faisceaux de lumière parallèle. Liouv. Journ. 1852, p. 79.

11) Kounty, Konstruktion der Intensitätslinien eines dreiax. Ellipsoids mit Benutzung der Kugelskala, Grun. Arch. 46, p. 49. 1866.
Ders., Theorie d. Bel. krummer Fl. vom 2. Gr. Brünn 1867.

12) S. Günther, Studien zur theor. Photometrie. Diss. Erl. 1872.

13) H. Höhl, Studien über Probl. der theor. Photom. München 1891. Pr.

14) M. Pieri, Über die Linien gleicher Helligkeit e. Fl. Atti di Torino 27. 1892. p. 239.

15) R. Müller, Jsophoten und Jsophengen, insb. auf den Flächen 2. Ordnung. Grun. Arch. (3) 1. p. 166. 1901.

Die bedeutendste Arbeit über die parallelstrahlige Beleuchtung krummer Flächen ist erschienen 1871 von L. Burmester,[1] der schon vorher zwei kürzere Arbeiten über denselben Gegenstand veröffentlicht hatte.[2] Dem Hauptwerk sind in einem Atlas eine grosse Reihe aus den analytischen Untersuchungen abgeleitete, vortreffliche Konstruktionen zugefügt.

Ausserdem liegt noch die eine oder andere Arbeit vor, die das Problem der Beleuchtung allgemeiner behandelt, nämlich bei im Endlichen gelegener Lichtquelle. Dieser Arbeiten soll weiter unten erst Erwähnung geschehen, weil auch die vorliegende Arbeit sich die Aufgabe gestellt hat, die Belichtung krummer Flächen durch divergente Strahlenbüschel zu untersuchen, speziell bei Rotationsflächen II. Ordnung, wenn sich in einem Brennpunkte der Flächen oder in zweien je ein Lichtpunkt befindet.

1) L. Burmester, Theorie und Darstellung der Beleuchtung gesetzmässig gestalteter Flächen. 2. Aufl. Leipzig 1875.

2) L. Burmester, Elemente einer Theorie der Jsophoten. Diss. Gött. 1865.

Ders., Über Jsophoten. Zs. f. Math. u. Phys. 1868 u. 1869.

Allgemeiner Teil.

§ 1.

Grundlegendes.

Es dürfte zunächst angebracht erscheinen, in Kürze die physikalischen Grundlagen anzuführen, welche die in Betracht kommenden Erscheinungen beherrschen, um aus ihnen das „Belichtungsgesetz“ abzuleiten. Was in den optischen Untersuchungen des vorigen Jahrhunderts im Vordergrund gestanden hat, die Frage nach dem Wesen des Lichts, bleibt für unsere Zwecke ausser acht. Unsere Aufgabe gehört in das Gebiet der geometrischen oder deskriptiven Optik. Die Tatsache allein, dass unser Auge an den Körpern verschiedene Grade der Helligkeit wahrzunehmen imstande ist, genügt, die Probleme der theoretischen Photometrie aufzuwerfen und ihrer Lösung entgegenzuführen.

Wir glauben einen bedeutsamen, weil stets und zuerst in die Augen fallenden Unterschied zu machen, wenn wir von beleuchtenden und beleuchteten Gegenständen reden. Doch dem ist nicht so. Wir würden besser sagen lichtaussendende und lichtempfangende

Körper, um damit nur für die letzteren die ausser ihnen liegende Ursache ihres Sichtbarseins auszudrücken. Doch müssen sie auch eine Bedingung mitbringen. Wir wissen, dass eine vollkommen spiegelnde Fläche bei Belichtung nicht sichtbar wird. Hier eröffnet sich eine Frage von Wichtigkeit.

Von einer punktförmigen, konstanten Lichtquelle strahle nach allen Richtungen des Raumes geradlinig Licht aus, einerlei, ob homogen oder gemischt. Nun zeigt die Erfahrung, dass Körper, die zwar genau gleiche Form haben, aber deren Oberfläche von verschiedener physikalischer Beschaffenheit ist, z. B. in Farbe oder Glätte, auch wenn man sie in dieselbe Lage der Lichtquelle gegenüber bringt, dem Auge nicht gleich beleuchtet, gleich hell erscheinen. Lässt man ferner von dem Lichtpunkte verschiedene Lichtsorten ausstrahlen, so erweist sich auch dabei die Helligkeit eines belichteten Gegenstandes unterschiedlich. Und letztlich kommen auch physiologische Eigenschaften des Auges ins Spiel, die bewirken, dass dasselbe nicht absolut Lichtstärken beurteilen kann.

Von allen diesen Erscheinungen und den dabei obwaltenden Gesetzen können wir in unseren Untersuchungen absehen. Nur soviel entnehmen wir daraus, dass jeder Punkt einer beleuchteten matten Fläche wiederum nach allen Seiten Licht aussendet, sich so verhält, als sei er selbstleuchtend, und dass die Menge dieses diffus reflektierten Lichtes von der Natur des betroffenen Körpers abhängt. Den Faktor, der die Modifizierung und Ausnutzung des

Lichtes der Quelle angibt, und der in jedem Falle eigens zu bestimmen wäre, lassen wir in den Rechnungen unberücksichtigt. Lambert nennt ihn albedo; natürlich gibt es für Transparentbeleuchtung einen entsprechenden Koeffizienten.[1]

Wir messen eben die Beleuchtung auf einer Fläche relativ, indem wir sie vergleichen mit derjenigen, die einem Flächenstücke derselben Oberflächenbeschaffenheit von bestimmter Form und Grösse und in bestimmter Lagebeziehung zum leuchtenden Punkte von diesem mitgeteilt wird. Haben wir zwei Lichtquellen, von denen die eine regulierbar ist und auf die doppelte Helligkeit der anderen eingestellt werden soll, so erhellt sogleich die Unmöglichkeit, dies auszuführen mit Verlass auf den blossen Augenschein. Um zu festeren Vorstellungen zu gelangen, nehmen wir an, eine konstante Quelle sende eine rings im Raume gleichmässig verteilte und bestimmte Anzahl von Strahlen aus, und wir erklären nun diejenige Quelle für doppelt so hell, bei der die Strahlendichte doppelt so gross ist. Eine solche Vorstellung entspricht zwar nicht den tatsächlichen Verhältnissen, indem ja das Licht auf unser Auge wirkt durch seine lebendige Kraft, die von der Schwingungsgeschwindigkeit der Ätherteilchen, also vom Quadrate der Amplitüde, der Maximaldeviation, abhängig ist; aber sie zeigt uns den Weg zur Messung des Lichtes. Ein

1) Über den Begriff albedo s. die Bemerkungen von Seeliger. — Sitz. Ber. d. Math.-Phys. Kl. d. Bayr. Ak. d. Wiss. München 1888. p. 430.

Flächenstück ist von einer Quelle mehr oder weniger beleuchtet, wenn es ceteris paribus von den homogen verteilten Lichtstrahlen mehr oder weniger viel aufnimmt. Eine solche Verschiedenheit kann nun erreicht und rechnerisch verfolgt werden entweder durch Variierung der Distanz von Lichtquelle und Objekt oder durch Variierung der Neigung des Objektes gegen die Strahlenrichtung.

Denken wir uns um den leuchtenden Punkt als Mittelpunkt ein System von konzentrischen Kugeln gelegt, so erhält jede Kugelfläche die gleiche Anzahl Strahlen, und da sich nun die Kugelflächen verhalten wie das Quadrat ihrer Radien, so ergibt sich: die Helligkeit einer Fläche, d. h. die Strahlenmenge pro Flächeneinheit steht im umgekehrten Verhältnisse zum Quadrate der Entfernung von der Quelle.

Darauf beruht auch die Methode der Lichtmessung mittelst des Fettfleckphotometers u. ä. Apparate, indem die grosse Unterschiedsempfindlichkeit des Auges für das Urteil: gleich und ungleich stark beleuchtet nutzbar gemacht wird.

Bei den Kugeln fielen die Strahlen stets senkrecht ein. Wie verhält es sich bei wechselnder Inzidenz? Wir denken uns um einen Strahl als Achse einen Kreiskegel mit der Spitze im Lichtpunkte abgegrenzt und in gewisser Entfernung von ihm einen ebenen Schirm normal zur Achse angebracht. Es entsteht ein kreisförmiges Bild auf dem Schirme. Neigt sich der Schirm gegen den Achsenstrahl, so entsteht ein ellipsenförmiges Bild durch den Lichtkegel. Nimmt man die Öffnung des Kegels unendlich klein an,

sodass die Strahlen als nahezu parallel zu betrachten sind, so vergrössert sich das Bild bei Neigung des Schirmes umgekehrt zum Kosinus des Winkels, den die Normale im Treffpunkte des Achsenstrahles mit diesem bildet. Da aber die Lichtmenge stets die gleiche bleibt, so vermindert sich also bei einer Neigung des Schirmes die Anzahl der Lichtstrahlen pro Flächeneinheit, d. h. die Helligkeit proportional dem Kosinus jenes Winkels.

Nach dem Gesagten lässt sich nun rein geometrisch für eine krumme Fläche die Helligkeit in jedem Punkte bestimmen. Man hat sich das um den betrachteten Punkt gelegene Flächenelement in der zugehörigen Tangentialebene ausgebreitet zu denken. Die Helligkeit in diesem Punkte berechnet sich dann nach der Formel

$$J = C \frac{\cos \varepsilon}{r^2}$$

wo r die Entfernung des Punktes von der Lichtquelle und ε den Winkel zwischen Flächennormale und Lichtrichtung, den sog. Inzidenzwinkel bedeutet. Diese Grösse J heisst auch die Beleuchtungsintensität. Die Konstante C der Formel, die als einen Faktor die Intensität der Lichtquelle, welcher J natürlich direkt proportional ist, und als andern die albedo enthält, soll in den folgenden Rechnungen gleich Eins gesetzt werden.

Die Formel gibt für jeden Punkt der Fläche die Beleuchtung so an, wie sie tatsächlich auf den Körpern vorhanden ist. Man nennt daher die Mannigfaltigkeit dieser Beleuchtungsgrössen auf

einer Fläche die wahre Beleuchtung derselben. Die Kurven, welche die Punkte gleicher wahrer Beleuchtungsintensität vereinigen, heissen Isophoten oder Lichtgleichen.

Von der wahren Beleuchtung hat Burmester noch die scheinbare unterschieden; es ist die Beleuchtung, wie sie dem in unendlicher Entfernung gedachten Auge auf der Fläche erscheint. Es sei hier nur kurz erwähnt, dass, während die Gültigkeit des Gesetzes der wahren Beleuchtung nie angefochten wurde, die Ansichten der Physiker über die Formulierung des Gesetzes der scheinbaren Beleuchtung auseinandergehen. Der Streit ist hier namentlich entbrannt um das sog. Kosinusgesetz, auch Lambert'sches oder Emanationsgesetz genannt, wonach ein Flächenelement nach beliebiger Richtung eine im Verhältnis zur Lichtmenge bei senkrechter Ausstrahlung mit cos α (α der Winkel zwischen Normale und Sehrichtung) proportionale Menge aussendet.[1] Die scheinbare Beleuchtung bei parallelen Strahlen wird proportional genommen zu cos ε oder zu cos $\varepsilon \cdot \cos \alpha$ (so bei Burmester und in der geannten Arbeit von Dupuis) oder zu cos $\varepsilon : \cos \alpha$ (Brisson,[2] dessen Annahme aber keine Anhänger fand).

Die geometrischen Örter für die Punkte gleicher scheinbarer Beleuchtungsintensität heissen Isophengen oder Hellegleichen.

1) S. darüber folgende neueren Arbeiten, wo auch weitere Litteratur: v. Uljanin (Wied. Ann. 62, 528 u. 542); F. Koláček (Wied. Ann. 64, 398); Sumpner (Phil. Mag. (5) 35, p. 81. 1893); H. R. Wright (Phil. Mag. 49. p. 199, auch Drud. Ann. 1, 17); Lord Rayleigh (Phil. Mag. (5) 49, 324); Thaler (Drud. Ann. 11, 996. 1903); A. Schmidt (Phys. Zs. 4, 453),

2) 5. Ausg. von Monges géom, descriptive 1827.

§ 2.

Die Beleuchtung durch ein divergentes Strahlenbüschel.

Halten wir Umschau nach solchen Arbeiten und Methoden, welche die Beleuchtung von Flächen aus einer im Endlichen gelegenen Lichtquelle behandeln, so bietet sich als die älteste Arbeit dar die von L. Cohen-Stuart.[1] Er sucht für ein durch einen ausserhalb gelegenen Lichtpunkt beleuchtetes Ellipsoid zu bestimmen 1^0 la courbe de séparation d'ombre et de lumière, 2^0 la valeur de l'intensité de la lumière en chaque point de la partie éclairée; 3^0 la quantité de la lumière recueillie par celle-ci.

Für die Intensität eines Flächenpunktes entwickelt er die Formel

$$J=\rho\frac{A_1 a_1 x + A_2 a_2 y + A_3 a_3 z - 1}{[(a_1-x)^2+(a_2-y)^2+(a_3-z)^2]^{3/2}\,(A_1^2 x^2 + A_2^2 y^2 + A_3^2 z^2)^{1/2}}$$

wo ρ eine Konstante, a_1, a_2, a_3 die Koordinaten des leuchtenden Punktes sind und dem Ellipsoid die Gleichung $A_1 x^2 + A_2 y^2 + A_3 z^2 = 1$ zu grunde liegt.

1) L. Cohen-Stuart, Solution d'un problème de photométrie. Liouville's Journ. T. XIII. 1848. pag. 257.

Mit besseren Hilfsmitteln unter Anwendung elliptischer Funktionen, löst die dritte der oben genannten Aufgaben H. A. Schwarz.[1] Er berechnet den sphärischen Kegelschnitt, der auf der Einheitskugel um den Lichtpunkt von den nach dem Rande des Ellipsoids gehenden Strahlen abgegrenzt wird. Stuart hatte diesen Lichtkegel durch eine Ebene geschnitten.

Als eine Fortsetzung der Schwarz'schen Arbeit bezeichnet sich eine Schrift von Penzold,[2] deren Inhalt sich schon aus der Überschrift genügend charakterisiert.

Erwähnt sei hier auch eine umfangreiche Abhandlung von Seeliger.[3] In dem theoretischen 1. Teile behandelt er die Lichtverhältnisse auf einem Rotationsellipsoid, das von der Sonne belichtet wird und dieses Licht der Erde zustrahlt.

Die Beleuchtung aus einem Punkte im Endlichen behandeln auch Beer (l. c. p. 16) und Burmester (Diss. p. 57), aber nur kurz und schematisierend.

---

1) H. A. Schwarz, Bestimmung der scheinbaren Grösse eines Ellipsoids für einen beliebigen Punkt des Raumes. Gött. Nachr. 1883. pag. 89.

2) Ed. Penzold, Bestimmung der Lichtmenge, die ein Ellipsoid von einem leuchtenden Punkte empfängt, wenn es teilweise von einem anderen Ellipsoid beschattet wird. Inaug.-Diss. Jena 1892.

3) H. Seeliger, Zur Theorie der Bel. der grossen Planeten, insb. des Saturn. Math.-Phys. Abh. d. Bayr. Ak. d. Wiss. 1888 p. 403.

Letzterer entwickelt die Formel für die Beleuchtungsintensität:

$$L = i \frac{(x-\alpha)\frac{\partial F}{\partial x} + (y-\beta)\frac{\partial F}{\partial y} + (z-\gamma)\frac{\partial F}{\partial z}}{\left|\left[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2\right]^3\right| \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}$$

wo $F(x, y, z) = 0$ die Fläche und α, β, γ die Koordinaten des Lichtpunktes sind.

Zwei kurze, schätzenswerte Abhandlungen liegen noch vor von Ruoss[1] und Houllevigue,[2] von denen der erstere eine Theorie des Lichtfeldes entwirft analog der Maxwell'schen Theorie des elektrostatischen Feldes, und der letztere auf grund derselben Anschauung sich einer eleganten Methode zur Behandlung von Beleuchtungsfragen bedient,[3] welche auch wir im folgenden zur Anwendung bringen wollen.

1) H. Ruoss, Die Bedeutung der Kraftlinien und Niveauflächen für die Optik. Wied. Ann. 53, 77. 1894.

2) L. Houllevigue, Note sur la Photom., Journ. de phys. 20, 126. 1891.

3) Der Vorschlag dazu ist schon gemacht worden von W. v. Bezold (Einige analoge Sätze der Photometrie und Anziehungslehre, Pogg. Ann. 141, 91. 1870) und von Ebert (Tageblatt der 62. Vers. Deutscher Naturf. u. Ärzte. 1890. p. 200.) — Es sei auch aufmerksam gemacht auf die Arbeiten von Blondel, s. insb. L'éclairage électr. 8, 341. 1896.

§ 3.

Die Beleuchtung einer krummen Fläche durch beliebig viele Lichtpunkte.

Eine Anzahl Lichtpunkte L_1, L_2, L_3 .... mit den Intensitäten i_1, i_2, i_3 .... seien im Raume gegeben. Es soll die Intensität der wahren Beleuchtung gefunden werden, die einem Flächenelemente einer Fläche im Punkte P mitgeteilt wird.

Bezeichnen r_1, r_2, r_3 ... die Entfernungen der Lichtpunkte vom beleuchteten Punkte, so ist nach Houllevigue durch

$$V = \sum \frac{i}{r}$$

das Beleuchtungspotential (potentiel lumineux) definiert. Ebert nennt diese Funktion das Luminal. Die Gleichung

$$\sum \frac{i}{r} = C$$

würde also die Schar der Niveauflächen enthalten, das sind solche Flächen, bei denen in jedem Punkte das eigene Element durch die bestrahlenden Punkte

das meiste Licht erhält im Gegensatz zu anderen durch den Punkt gelegten Flächenelementen.

Gehen wir von P in Richtung der Flächennormale PN um dn weiter zur nächsten Niveaufläche, so haben wir dort das Potential

$$V + dV = \sum \frac{i}{r + dr} .$$

Daraus berechnet sich das Differential

$$dV = -\sum \frac{i}{r^2} dr .$$

Der Differentialquotient $\frac{dV}{dn}$ soll nun, negativ genommen, die Beleuchtungsintensität im Punkte P der Fläche darstellen. Die Formel

$$-\frac{dV}{dn} = \sum \frac{i}{r^2} \frac{dr}{dn}$$

muss also identisch sein mit der im § 1 entwickelten $J = i \cos \varepsilon : r^2$. Wirklich ist $\frac{dr}{dn}$ der Kosinus des Inzidenzwinkels, des Winkels zwischen Strahlenrichtung und Normalen; die durch die verschiedenen Lichtpunkte hervorgebrachten einzelnen Beleuchtungsstärken summieren sich einfach.

Diese Formel gibt ein bequemes Mittel an die Hand, die Beleuchtung der Rotationsflächen II. Ordnung von einem oder zwei Brennpunkten als Licht-

punkten aus zu verfolgen. Man berücksichtige noch die Gleichung

$$\frac{dV}{dn} = \frac{\partial V}{\partial x}\cos\lambda + \frac{\partial V}{\partial y}\cos\mu + \frac{\partial V}{\partial z}\cos\nu .$$

λ, μ, ν sind die Winkel, welche die Flächennormale im betrachteten Punkte mit den Achsen des rechtwinkligen Koordinatensystems einschliesst.

Spezieller Teil.

§ 4.

Die Beleuchtung des Rotationsellipsoids von einem Brennpunkte aus.

Da bei der Beleuchtung von Rotationsflächen aus Punkten, die auf der Rotationsachse gelegen sind, die Isophoten offenbar Kreise normal zur Achse sind, so genügt es allemal, die Lichtverhältnisse nur auf einer Meridionalkurve, etwa der Erzeugenden in der X-Y-Ebene zu studieren. Die Erzeugende des Ellipsoids ist eine Ellipse. Die beigefügte Figur erklärt die Benennungen.

In dem Fokus C_2 befinde sich ein Lichtpunkt

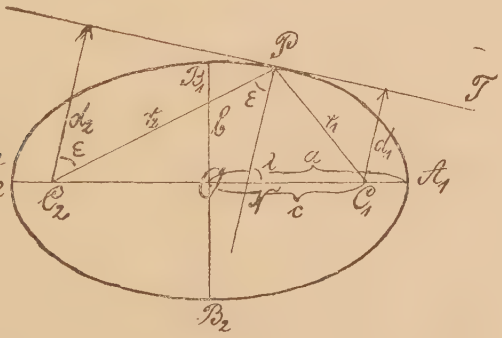


Fig. 1.

von der Stärke Eins. Wir betrachten einen beliebigen Punkt P der Ellipse, dessen Brennstrahl aus C_2 mit r_2 bezeichnet sei.

Es ist demnach

$$V = \frac{1}{r_2} = \frac{1}{\sqrt{(x+c)^2 + y^2}}$$

Für die partiellen Ableitungen von V nach x und y ergibt sich

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{x+c}{\sqrt{[(x+c)^2 + y^2]^3}}$$

und

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{[(x+c)^2 + y^2]^3}}.$$

Weil $\cos\mu$ der Formel in diesem Falle gleich $\sin\lambda$ ist, so berechnen wir für $\cos\lambda$ und $\sin\lambda$ die Identitäten $1 : \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\lambda}$ bezw. $1 : \sqrt{1 + \cot^2\lambda}$ unter Berücksichtigung, dass $\operatorname{tg}\lambda = -\frac{dx}{dy}$ ist.

Aus der Ellipsengleichung

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

berechnet sich

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\lambda = \frac{a^4 - c^2x^2}{b^2x^2}$$

$$\cos\lambda = \frac{bx}{\sqrt{a^4 - c^2x^2}}; \quad \sin\lambda = \frac{a\sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{a^4 - c^2x^2}}$$

Setzt man diese Werte nach der Formel

$$J = -\left(\frac{dV}{dx}\cos\lambda + \frac{dV}{dy}\sin\lambda\right)$$

zusammen, so erhält man für die Beleuchtungsintensität J_2 im Punkte P

$$J_2 = \frac{bx\,(x+c)}{\sqrt{a^4-c^2x^2}\,\sqrt{[(x+c)^2+y^2]^3}} + \frac{ay\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{a^4-c^2x^2}\,\sqrt{[(x+c)^2+y^2]^3}}$$

oder

$$J_2^2 = \frac{[bx\,(x+c)+ay\sqrt{a^2-x^2}]^2}{(a^4-c^2x^2)[(x+c)^2+y^2]^3} = \frac{1}{(a^2+cx)(a^2-cx)} \cdot \frac{[bx\,(x+c)+ay\sqrt{a^2-x^2}]^2}{[(x+c)^2+y^2]^3}$$

Nachdem in dem letzten Faktor für y substituiert worden ist $\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, wird er weiter umgeformt in

$$\frac{[bx\,(x+c)+b\,(a^2-x^2)]^2}{[(x+c)^2+\frac{b^2}{a^2}\,(a^2-x^2)]^3} = \frac{a^6\,b^2\,(a^2+cx)^2}{[a^4+c^2x^2+2a^2cx]^3}$$

Dies eingesetzt, ergibt sich für J_2^2

$$J_2^2 = \frac{a^6\,b^2\,(a^2+cx)}{(a^2-cx)\,[a^4+c^2x^2+2a^2cx]^3} = \frac{a^6\,b^2}{(a^2-cx)(a^2+cx)^5} = \frac{b^2}{(a-ex)(a+ex)^5}$$

wobei e die numerische Exzentrizität der Ellipse

bedeutet. Eine weitere Vereinfachung entsteht nach Einsetzung der beiden Brennstrahlen r_1 und r_2

$$J_2^2 = \frac{b^2}{r_1 \cdot r_2^5}$$

Daher endlich

$$J_2 = \frac{1}{r_2^2} \frac{b}{\sqrt{r_1 \cdot r_2}}$$

Der letzte Faktor bedeutet nichts anderes als den Kosinus des Inzidenzwinkels; denn es ist $r_1 \cdot r_2 = b'^2$, wenn b' der zu OP konjugierte Halbmesser ist. $\frac{b}{b'}$ ist aber, wie sich zeigen lässt, $d_1 : r_1 = d_2 : r_2$. Und dies ist nach Fig. 1 gleich cos ε.

Es möge kurz die gefundene Beleuchtungsfunktion für einige spezielle Werte des Brennstrahles des leuchtenden Fokus verifiziert werden, und zwar für $r_2 = a - c$, bzw. $= a + c$, bzw. $= a$, bzw. $= p$, bezw. $= 2a - p$. In den beiden ersten Fällen gibt die Formel beidemal

$$J_2 = \frac{1}{r_2^2} \cdot \frac{b}{\sqrt{(a-c)(a+c)}} = \frac{1}{r_2^2} .$$

Da wir an den Endpunkten der grossen Achse senkrechte Inzidenz haben, so ist die Formel in Übereinstimmung mit dem Beleuchtungsgesetz, wonach die Intensität proportional dem Quadrate der Entfernung abnimmt.

An den Endpunkten der kleinen Achse beträgt die Intensität

$$J_2 = \frac{1}{r_2^2} \frac{b}{a}$$

und $\frac{b}{a}$ ist in diesem Falle cos $(\overline{C_2 B_1}, \overline{B_1 O})$.

Für die beiden Punkte P_1 und P_2 (Fig. 2) erhält man beidemal

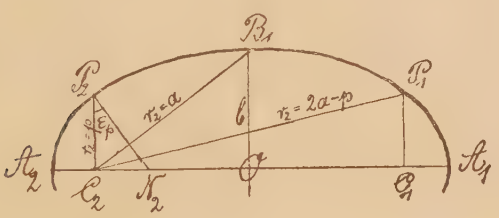
$$J_2 = \frac{1}{r_2^2} \frac{b}{\sqrt{p\,(2a-p)}}$$

Der Inzidenzwinkel ist derselbe in P_1 und P_2, da die Normale den Winkel zwischen den Brennstrahlen halbiert.

Der Faktor $\frac{b}{\sqrt{p\,(2a-p)}}$ soll noch mit $\cos \varepsilon_p$ indentifiziert werden.

Nach Fig. 2 ist $\cos \varepsilon_p = p : P_2 N_2$. Die Länge

Fig. 2



der Normalen berechnet sich aus der Gleichung

$$N = y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

$$P_2 N_2 = p \sqrt{1 + \frac{b^2 c^2}{a^2 (a^2 - c^2)}}$$

Also erhält man

$$\cos \varepsilon_p = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{c^2}{a^2}}} = \frac{b}{\sqrt{\frac{b^2}{a} a + \frac{b^2 c^2}{a^2}}}$$

$$= \frac{b}{\sqrt{p\left(2a - \frac{a^2 - c^2}{a}\right)}} = \frac{b}{\sqrt{p(2a-p)}}$$

Auch für die Kugel als Grenzfall des Ellipsoids, wobei die Grössen r_1, r_2, a und b alle durch den Kugelradius R zu ersetzen sind, erweist sich die Formel für J_2 als richtig, indem wir erhalten

$$J = \frac{1}{R^2}$$

Eine recht interessante Eigenschaft des Rotationsellipsoids gibt sich kund, wenn wir die Beleuchtungsfunktion J_2 nach r_2 derivieren. Houllevigue hat bereits darauf aufmerksam gemacht.

$$\frac{dJ_2}{dr_2} = b\left[\frac{1}{2} r_1^{-\frac{3}{2}} . r_2^{-\frac{5}{2}} - \frac{5}{2} r_1^{-\frac{1}{2}} . r_2^{-\frac{7}{2}}\right]$$

$$= \frac{b}{\sqrt{r_1 r_2} \cdot r_2^2}\left(\frac{1}{2r_1} - \frac{5}{2r_2}\right) = J_2 \frac{r_2 - 5r_1}{2r_1 r_2}$$

Da sowohl J_2 als $r_1 r_2$ nicht verschwinden können, so zeigt J_2 eventuell ein Minimum oder Maximum für $r_2 = 5 r_1 = \frac{5}{3}$ a. Um dies zu entscheiden, bilden wir die nächst höhere Ableitung

$$\frac{d^2 J_2}{dr_2^2} = \frac{dJ_2}{dr_2} \frac{r_2 - 5r_1}{r_1 r_2} +$$

$$J_2 \frac{2r_1 r_2 (1 + 5) - (r_2 - 5r_1)(4a - 4r_2)}{4r_1^2 r_2^2}$$

$$= J_2 \frac{(r_2 - 5r_1)^2 - (r_2 - 5r_1)(4a - 4r_2) + 12 r_1 r_2}{4r_1^2 r_2^2}$$

Dieser Ausdruck wird für $r_2 = \frac{5}{3}$ a zu $\frac{3 J_2}{r_1 r_2}$, also positiv.

In den Punkten des Ellipsoids, für die $r_2 = \frac{5}{3}\,a$ wird, haben wir also ein Minimum von Helligkeit. Ein solcher Parallelkreis kleinster Beleuchtungsintensität ist aber offenbar nur möglich, solange $\frac{5}{3}\,a < a + c$ (dem grösstmöglichen Werte von r_2) ist, d. h. solange die numerische Exzentrität grösser ist als $\frac{2}{3}$. Im andern Falle nimmt die Helligkeit stetig von einem zum andern Scheitel ab.

§ 5.

Die Beleuchtung des Rotationsellipsoids von beiden Brennpunkten aus.

Das Ellipsoid werde beleuchtet von zwei gleich starken, in den Brennpunkten befindlichen Lichtquellen von der Intensität i. Die von dem Lichtpunkte in C_1 herrührende Beleuchtungsintensität der Ellipsoidpunkte wird sein

$$J_1 = \frac{i}{r_1^2} \cdot \frac{b}{\sqrt{r_1 r_2}} .$$

und analog die aus C_2 stammende

$$J_2 = \frac{i}{r_2^2} \cdot \frac{b}{\sqrt{r_1 r_2}} .$$

Die Gesamtbeleuchtung eines Punktes ist also

$$J = \frac{ib}{\sqrt{r_1 r_2}} \left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} \right) = ib \frac{r_1^2 + r_2^2}{(r_1 r_2)^{5/2}}$$

Diese Funktion differentiieren wir zur weiteren Untersuchung nach r_2 und erhalten

$$\frac{dJ}{dr^2} = ib \frac{(r_1 r_2)^{5/2} [2r_2 - 2r_1] - (r_1^2 + r_2^2) \frac{5}{2} (r_1 r_2)^{3/2} (2a - 2r_2)}{(r_1 r_2)^5}$$

oder indem wir in der eckigen Klammer r_1 durch $2a - r_2$ ersetzen und durch $(r_1 r_2)^{3/2}$ kürzen

$$\frac{dJ}{dr_2} = ib \frac{r_2 - a}{(r_1 r_2)^{7/2}} \cdot \left(4 r_1 r_2 + 5 (r_1^2 + r_2^2)\right)$$

$\frac{dJ}{dr_2}$ wird also unstetig an der Stelle $r_2 = a$. Auf dem grössten Parallelkreise des Rotationsellipsoids haben wir ein Minimum von Helligkeit.

Wenden wir uns noch der Beleuchtung durch zwei Lichtpunkte von verschiedener Intensität zu, so geben uns die Formeln, wenn i_1 und i_2 die Lichtstärke in C_1 bezw. C_2 bedeutet:

$$J_1 = \frac{b}{\sqrt{r_1 r_2}} \frac{i_1}{r_1^2} \cdot \quad J_2 = \frac{b}{\sqrt{r_1 r_2}} \frac{i_2}{r_2^2}$$

also

$$J = J_1 + J_2 = \frac{b}{\sqrt{r_1 r_2}} \left(\frac{i_1}{r_1^2} + \frac{i_2}{r_2^2}\right) = \frac{b}{(r_1 r_2)^{5/2}} (i_2 r_1^2 + i_1 r_2^2)$$

Die erste Ableitung von J nach r_2 nimmt die Form an

$$\frac{dJ}{dr_2} = \frac{b}{(r_1 r_2)^{7/2}} [2 r_1 r_2 (i_1 r_2 - i_2 r_1) - 5 (a - r_2) (i_2 r_1^2 + i_1 r_2^2)]$$

und lässt ebenfalls erkennen dass für $r_2 = a$ nur dann eine Unstetigkeit vorhanden ist, wenn $i_1 = i_2$ ist.

Ist $i_1 > i_2$, so rückt das Minimum auf den mit A_2 bezeichneten Scheitelpunkt zu. Es soll untersucht werden, welche Bedingung an i_1 und i_2 geknüpft sein muss, damit dieses Minimum ganz verschwindet, die Beleuchtung also von dem einen

Scheitel zum andern stetig abnimmt. Da offenbar nur ein Minimum überhaupt möglich ist, d. h. die in der eckigen Klammer der letzten Gleichung stehende Funktion in dem Intervall der Extremwerte $r_1 = a + c$, $r_2 = a - c$ einerseits und $r_1 = a - c$, $r_2 = a + c$ anderseits nur einmal den Nullwert annehmen kann — eine weitere Unstetigkeit der Beleuchtungskurve ist nicht vorhanden —, so ist zu erörtern, wann die Funktion für die Extremwerte beidemal gleiches Vorzeichen hat. Dann hat die Gleichung

$$f(r_1 r_2) = 2r_1 r_2 (i_1 r_2 - i_2 r_1) - 5 (a - r_2) (i_2 r_1^2 + i_1 r_2^2) = 0$$

in dem genannten Bereiche keine Wurzel.

Für die Werte von r_1 und r_2 im Punkte A_1 nimmt f folgende Gestalt an:

$$2r_1 r_2 [i_1 a + i_1 c - i_2 a + i_2 c] + 5c [i_1 (a + c)^2 + i_2 (a - c)^2]$$

und ist unter der Voraussetzung $i_1 > i_2$ stets positiv.

Wir bilden nun $f(a + c, a - c)$.

$$2r_1 r_2 [i_1 a - i_1 c - i_2 a - i_2 c] - 5c [i_1 a^2 + i_1 c^2 + i_2 a^2 + i_2 c^2 + 2ac i_2 - 2ac i_1]$$
$$= 2r_1 r_2 [ad - cs] - 5c [a^2 s + c^2 s - 2ac d]$$

worin d die Differenz und s die Summe von i_1 und i_2 bedeutet. Weiter wird

$$f = 2r_1 r_2 [ad - cs] - 5c [s (a + c)^2 - 4a c i_1]$$
$$= 2 (a^2 - c^2) [ad - cs] - 5cs (a + c)^2 + 20a c^2 i_1$$

Die Bedingung dafür, dass dieser Ausdruck positiv wird, drückt sich folgendermassen aus.

$$2 (a^2 - c^2) (ad - cs) + 20ac^2 i_1 > 5cs (a + c)^2$$

Man dividiere durch $2(a^2-c^2)$, berücksichtige $i_1 = \frac{d+s}{2}$ und löse nach $\frac{d}{s}$ auf.

$$\frac{d}{s} > \frac{\frac{5}{2}c(a+c)^2 + c(a^2-c^2) - 5ac^2}{a(a^2-c^2) + 5ac^2}$$

Schliesslich erhält man

$$\frac{d}{s} > c\,\frac{10a^2-3b^2}{2a^3+8ac^2}$$

$$\frac{d}{s} > c\,\frac{7a^2+3c^2}{2a^3+8ac^2}$$

$$\frac{d}{s} > e\,\frac{7+3e^2}{2+8e^2}$$

Setzt man für letzteren Ausdruck σ, so findet man, dass die Beleuchtungsstärke von Scheitel zu Scheitel fortdauernd abnimmt, wenn das Verhältnis der Intensitäten $\frac{i_1}{i_2} > \frac{1+\sigma}{1-\sigma}$ ist.

§ 6.

Die Beleuchtung des Rotationsparaboloids von dem Brennpunkte aus.

Auch hier ist es gestattet, die Untersuchung auf einen Achsenschnitt, auf den in der X-Y-Ebene zu beschränken. Befindet sich im Brennpunkte ein Lichtpunkt von der Stärke Eins, so hat ein Parabelpunkt das Beleuchtungspotential

$$V = \frac{1}{r} = \frac{1}{x + \frac{p}{2}}$$

Man bildet nun die partiellen Differentiale $\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}$ sowie cos λ und sin λ, wo λ wieder den Winkel der Normalen mit der X-Achse bedeutet.

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{1}{(x + \frac{p}{2})^2} = -\frac{1}{r^2}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

$$\operatorname{tg} \lambda = -\frac{y}{p}\,;\ \cos \lambda = 1 : \sqrt{1 + \frac{2x}{p}} = \sqrt{\frac{p}{2r}}$$

$$\sin \lambda = 1 : \sqrt{1 + \frac{p}{2x}} = \sqrt{\frac{x}{r}}$$

Demnach erhält man für J

$$J = \frac{1}{r^2}\sqrt{\frac{p}{2r}} = \frac{\sqrt{\frac{p}{2}}}{\sqrt{r^5}}$$

Der erste Differentialquotient von J nach r berechnet sich zu

$$\frac{dJ}{dr} = -\frac{5}{4}\frac{\sqrt{2p}}{\sqrt{r^7}}$$

und besagt, dass nur für $r = \infty$ eine Unstetigkeit der Beleuchtungsfunktion stattfindet, die sich eben mit wachsendem r der Null nähert.

§ 7.

Die Beleuchtung der beiden Rotationshyperboloide.

Wenn wir bei dem Rotationshyperboloid à deux nappes die Schale, die durch die positive X-Achse geht, beleuchten, so kann dies aus dem eigenen Brennpunkte C_1 und dem der linken Schale C_2 geschehen. Da sich die Rechnungen von der Ellipse auf die Hyperbel übertragen lassen, wenn man statt der reellen Halbachse b die imaginäre $\sqrt{-1}\,b$ einführt und bei Zuordnung von J zu den Brennpunkten sorgt, dass jedesmal die Potentialfunktion V bei Ellipsoid und Hyperboloid übereinstimmt, so ist die Beleuchtungsfunktion für die konkave Seite

$$J_1^2 = i_1^2 \frac{-b^2}{(a+ex)(a-ex)^5}$$

und für die konvexe Seite

$$J_2^2 = i_2^2 \frac{-b^2}{(a-ex)(a+ex)^5}$$

Markieren wir auf einem aus Papier hergestellten Hyperboloide einen Parallelkreis mit Paraffin, so wird derselbe für ein tangential blickendes Auge ver-

schwinden, wenn sich die Intensitäten der Lichtpunkte C_1 und C_2 wie folgt verhalten:

$$i_1 : i_2 = (a - ex)^2 : (a + ex)^2$$

also genau so wie beim gewöhnlichen Fettfleckphotometer, was sich daraus erklärt, dass die Inzidenzwinkel gleich sind.

Für das aus dem Mittelpunkt beleuchtete einmantelige Rotationshyperboloid, bei dem ebenfalls in jedem Schnitte durch die Rotationsachse alles sich gleich verhält, erhält man die Beleuchtungsfunktion

$$J = \frac{ab}{[e^2 x^2 - b^2]^{3/2} [e^2 x^2 - a^2]^{1/2}}$$

Die Anregung zu vorstehender Arbeit erhielt ich von dem Direktor des Physikalischen Instituts der Universität Rostock, Herrn Prof. Dr. phil. et med. Matthiessen.

Hierfür, sowie für das wohlwollende Interesse, das er mir bei der Ausarbeitung entgegenbrachte, drängt es mich, Herrn Professor Matthiessen auch an dieser Stelle meinen Dank auszusprechen.